# Mit GeoGebra das –Gesetz erobern

**Die GeoGebra-Dateien „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil1\_Einzelarbeit“, „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil2\_Sammeln“, „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil3\_Trajektorie“ und „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil4\_Intervallbreite“ bieten eine gelenkte Möglichkeit, das o.g. Gesetz im Unterricht zu erforschen, so dass eine Quantifizierung des Gesetzes der großen Zahlen (digital unterstützt) erreicht werden kann. Die Vorgehensweise besteht aus mehreren Schritten, denen hier zwei Vorüberlegungen vorgeschaltet sind.**

# Vorüberlegungen

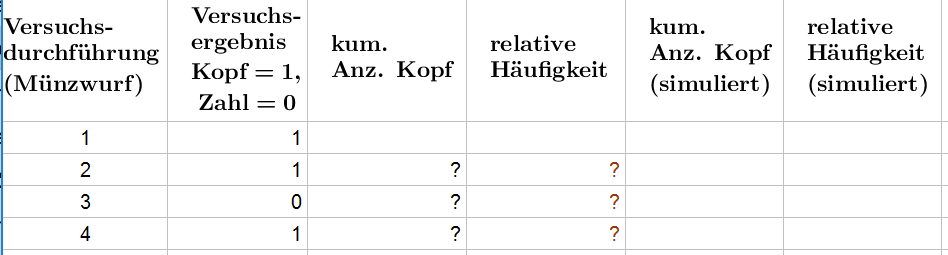
Das Beispiel des wiederholten Münzwurfs dient als Basis für alle folgenden Untersuchungen und Überlegungen. Dabei wird die relative Häufigkeit von *Kopf* beobachtet.

Prinzipiell sind bei Münzwürfen alle Brüche möglich, auch wenn die Extremfälle „rel. H.“ (kein *Kopf*) und „rel. H. “ (immer *Kopf*) sehr unwahrscheinlich sind. Wir können erwarten, dass die meisten relativen Häufigkeiten in der Nähe von liegen. Wenn man also sichere Aussagen machen will, steht man vor dem Dilemma, nur triviale Aussagen wählen zu können.

Aber was kann man mit einer Sicherheit von 95 % aussagen?

## Vorentlastung: Was ist eine Trajektorie?

In diesem Schritt werfen die Schülerinnen und Schüler selbst eine Münze und erzeugen daraus eine Trajektorie mit Hilfe des GeoGebra-Sheets „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil1\_Einzelarbeit“. So erleben sie den Zufallsversuch real, lernen eine Trajektorie als Visualisierung der Entwicklung der kumulierten relativen Häufigkeit kennen, und machen erste Beobachtungen, wie diese variiert.

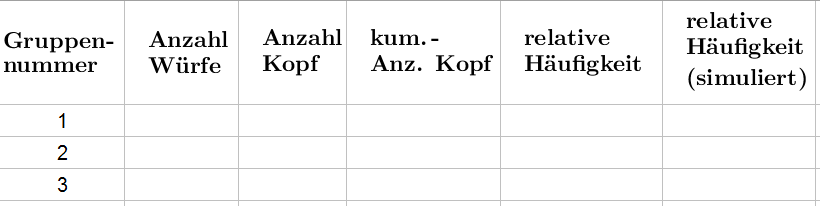
In der GeoGebra-Datei findet sich im oberen Teil eine Tabelle wie hier dargestellt. In Einzel- oder Partnerarbeit wird nun eine Münze geworfen, die Ergebnisse werden in der zweiten Spalte (*Versuchsergebnis*) notiert, und zwar 1 für *Kopf* und 0 für *Zahl*. Automatisch ergänzt GeoGebra die kumulierte Anzahl des Ereignisses *Kopf* in der dritten Spalte (*kum. Anz. Kopf*), wenn die Fläche *Berechnung: kumulierte Anzahl Kopf* angeklickt wird. Die Vorgabe, dass die Münze 50-mal geworfen werden soll, ist schnell erfüllt. Klicken auf *Berechnung: relative Häufigkeit* und *Erzeugen der Trajektorie* bewirkt das Ausfüllen der vierten Spalte bzw. das Erscheinen der Trajektorie im unteren Teil des GeoGebra-Sheets. Dort ist zusätzlich die Linie eingezeichnet, so dass die Position der erschienenen Punkte relativ zur Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses *Kopf* betrachtet werden kann.

Zusätzlich bietet dieses Sheet die Möglichkeit, die real erlebte Trajektorie mit einer simulierten abzugleichen. Dafür muss die Schaltfläche *Trajektorie (simuliert)* geklickt werden. Geschieht dies mehrfach, so erscheint jeweils eine neue (simulierte) Trajektorie, und man gewinnt einen ersten Eindruck davon, wie diese variieren können.

Arbeitsanweisung / Leitfragen

1. Werfen Sie eine Münze 50-mal. Tragen Sie 1 für *Kopf* und 0 für *Zahl* in die zweite Spalte (*Versuchsergebnis*) ein.
2. Aktivieren Sie die Flächen *Berechnung: kumulierte Anzahl Kopf*, *Berechnung: relative Häufigkeit* und *Erzeugen der Trajektorie*. Beobachten Sie, was passiert. Notieren Sie Ihre Beobachtungen.
3. Klicken Sie mehrfach die Fläche *Trajektorie (simuliert)*. Beobachten Sie, was passiert. Notieren Sie Ihre Beobachtungen.

## Gemeinsame Trajektorien

In einem nächsten Schritt werden die Ergebnisse der Gruppe zusammengetragen. Die als Gruppenresultat deutlich erhöhte Wiederholungszahl ermöglicht die weiterführende Beobachtung, dass die gemeinsame Trajektorie für große meistens (!) enger um die Gerade verläuft. Die zufallstypischen Variationen werden über die durch Simulation erzeugte Trajektorie veranschaulicht.

Das Sammeln geschieht mit dem GeoGebra-Sheet „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil2\_Sammeln“. Hier können, nachdem zuvor „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil1\_Einzelarbeit“ bearbeitet wurde, die Ergebnisse der Lerngruppe in einer Tabelle gesammelt werden. Idealerweise sollte jeder Schüler/jede Schülerin/jede Zweiergruppe jeweils 50-mal eine Münze geworfen haben, aber wenn das nicht der Fall ist, entsteht kein Problem, denn in der Spalte *Anzahl Würfe* kann die exakte Anzahl der Würfe angegeben werden. Durch schrittweises Klicken der Schaltflächen *Berechnung: kumulierte Anzahl Kopf*, *Berechnung: relative Häufigkeiten* und *Erzeugen der Trajektorie* werden die entsprechenden Felder der Tabelle ausgefüllt und die gemeinsam erarbeitete Trajektorie erzeugt. Zusätzlich kann über die Schaltfläche *Trajektorie (simuliert)* eine simulierte Trajektorie, die auf den denselben Anzahlen von Würfen basiert, erzeugt werden.

Leitfrage

1. Sammeln Sie die Ergebnisse in der GeoGebra-Datei „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil2\_Sammeln“, indem Sie die Anzahlen der Münzwürfe und die Anzahlen von *Kopf* in den ersten beiden Spalten der Tabelle eintragen.
2. Klicken Sie nacheinander die Flächen *Berechnung: kumulierte Anzahl Kopf*, *Berechnung: relative Häufigkeiten* und *Erzeugen der Trajektorie*, sowie mehrfach *Trajektorie (simuliert)*. Beobachten Sie.
3. Benennen Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verschiedenen Trajektorien.

# Funktionen des GeoGebra-Sheets „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil3\_Trajektorie“

Grundsätzlich ist das Sheet „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil3\_Trajektorie“ in zwei Teile unterteilt, die die linke bzw. die rechte Bildschirmhälfte einnehmen. Dabei passieren die Simulationen in der linken Hälfte, und ihre Ergebnisse werden als Säulendiagramme in der rechten Hälfte gesammelt, visualisiert und durch zusätzliche Informationen im Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahl, mit Konfidenzintervallen und mit dem -Gesetz in Beziehung gesetzt.

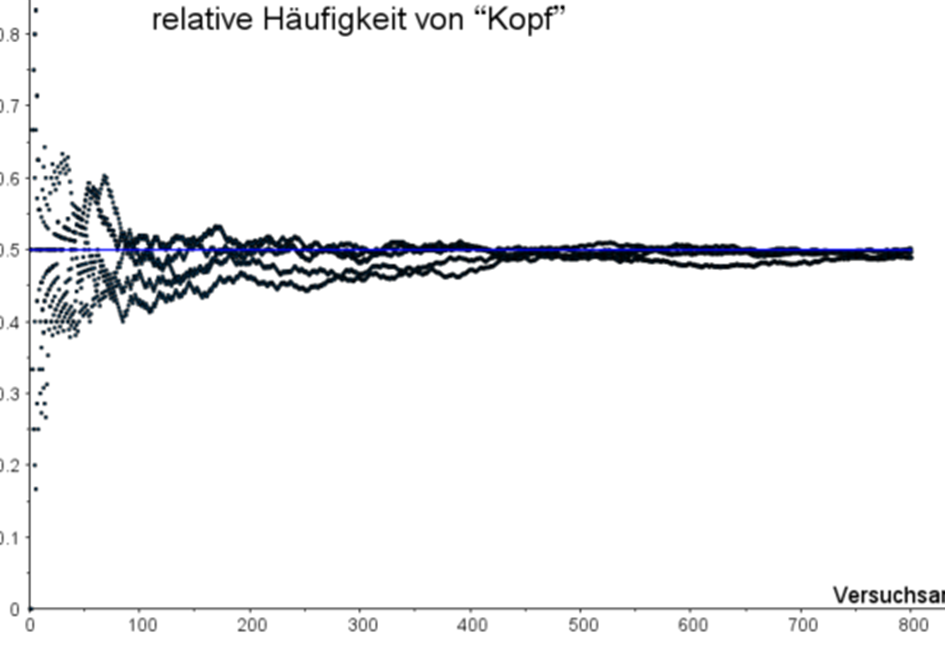
## Erster Schritt: Simulieren von Trajektorien

Nachdem wir erfahren haben, wie eine Trajektorie genau entsteht, und welche Phänomene sich beim wiederholten Münzwurf in Bezug auf das Ereignis *Kopf* beobachten lassen, wenden wir uns nun der Hauptdatei zu.

Der Blick wird zunächst auf die Verläufe der relativen Häufigkeiten und dann punktuell auf die beiden Stellen und gelenkt, deren genauere Erkundung die weiteren Schritte bestimmt. Die Linie steht für die theoretische Wahrscheinlichkeit von *Kopf*.

Bei der ersten Begegnung mit dem Sheet beschränken wir uns daher auf die Betrachtung der linken Seite und aktivieren nur das Kästchen „Trajektorie“. Mehrfaches klicken auf die Schaltfläche „Neue Trajektorie“ erzeugt genau diese, die vorherigen Trajektorien bleiben ausgeblendet. Falls der Einstieg über „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil1\_Einzelarbeit“ oder „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil2\_Sammeln“ gewählt wurde, fällt es nun leicht zu erläutern, was hier dargestellt ist: Auf der waagerechten Achse ist die Anzahl der Wiederholungen aufgetragen; auf der senkrechten Achse die dazugehörige relative Häufigkeit von *Kopf* beim wiederholten Münzwurf. Für sehr kleine sind nur wenige Werte für die relative Häufigkeit möglich, zum Beispiel können bei nur die relativen Häufigkeiten 0 und 1 auftreten, bei nur 0, ½ und 1. Das bewirkt auch das Muster entlang von Hyperbelgraphen, welches die Punkte der Trajektorie bilden. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass der Definitionsbereich der Trajektorie diskret ist, und dass sich nur scheinbar eine durchgezogene Linie für große bildet; tatsächlich besteht sie aus Punkten, die nicht miteinander verbunden sind, was bei entsprechender Vergrößerung der Graphik gut erkennbar ist.

Arbeitsanweisung / Leitfragen

1. Aktivieren Sie nur das Kästchen „Trajektorie“, und belassen Sie und . Sehen Sie nur auf die linke Seite des Sheets. Klicken Sie wiederholt auf die Schaltfläche „Neue Trajektorie“. Erklären Sie die Achsenbeschriftungen der waagerechten und der senkrechten Achse sowie die Bedeutung der Punkte für und für .
2. Aktivieren Sie auch das Kästchen „“ und erklären Sie die Bedeutung der nun erscheinenden Linie im Sachzusammenhang.
3. (optional, falls „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil1\_Einzelarbeit“ und „Zufall\_im\_Schlauch\_Teil2\_Sammeln“ nicht bearbeitet wurden)

Hier ist der Verlauf der kumulierten relativen Häufigkeiten für *Kopf* beim mehrfachen Münzwurf dargestellt. Beschreiben Sie, welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede die verschiedenen Trajektorien aufweisen.

## Zweiter Schritt: Beobachten der Trajektorien für zwei feste Stichprobenumfänge

In diesem Schritt geht es darum, die Stellen für und genauer zu betrachten, indem wir sammeln und in einem Histogramm darstellen, welche relativen Häufigkeiten jeweils für *Kopf* wie oft beobachtet werden können.

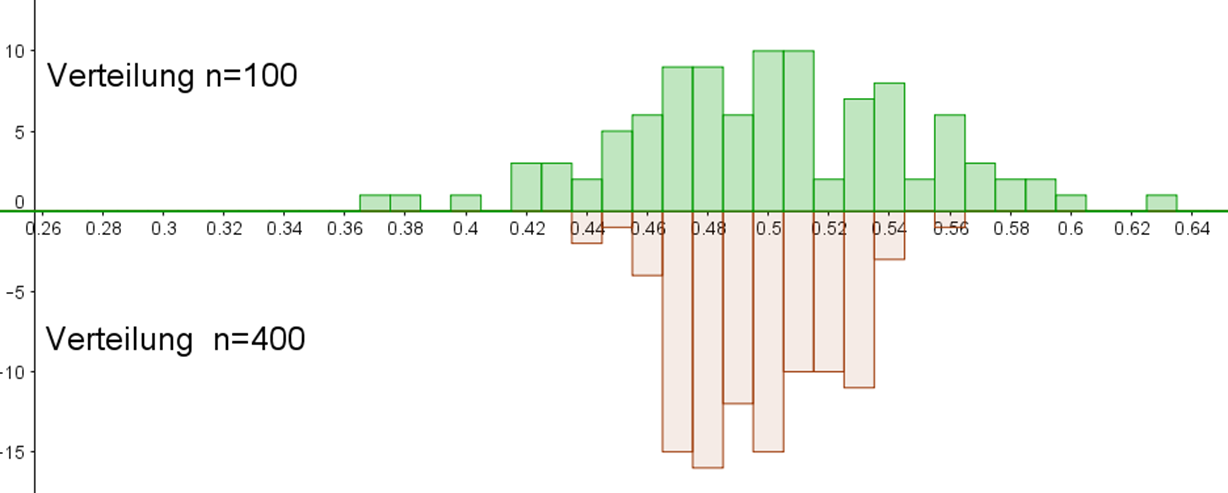
Wenn man nun zusätzlich das Kästchen „Spurpunkte“ aktiviert, markiert dies die Punkte für und auf der Trajektorie durch einen grünen bzw. roten Punkt. Durch das Einschalten dieser Spurfunktion kann man beobachten, wie die relative Häufigkeit an diesen beiden Stellen variiert. Man erkennt, dass die grünen Punkte ( für ) breiter streuen als die roten (für ), aber die genaue Verteilung wird nicht deutlich, denn übereinanderliegende Punkte sind nicht als mehrere Punkte zu erkennen. Dies ist jedoch im Histogramm auf der rechten Seite zu erkennen.

Die Verteilung kann man sich auf der rechten Seite anzeigen lassen, indem man *Histogramm* aktiviert. Die relativen Häufigkeiten, die für bzw. Versuchswiederholungen beobachtet werden, werden in jeweils einem Histogramm visualisiert.

Beim Klicken auf „Eine neue Trajektorie (mit Spur)“ bzw. auf „10 neue Trajektorien (ohne Spur)“ werden die neu beobachteten relativen Häufigkeiten im Histogramm ergänzt, indem entweder eine neue Säule entsteht oder (falls die beobachtete relative Häufigkeit schon einmal aufgetreten ist) eine bestehende erhöht wird. Bei jedem Klicken auf „Eine neue Trajektorie“ kommt also eine kleine Säule hinzu, oder eine bestehende Säule wird höher. Das Histogramm für ist grün, das für ist rot, passend zur Färbung der Spurpunkte. Um die beiden Diagramme besser vergleichen zu können, ist das Histogramm für an der -Achse gespiegelt dargestellt.

Arbeitsanweisung / Leitfrage

1. Aktivieren Sie nun auch das Kästchen für „Spurpunkte“ und „Histogramm“ und starten Sie eine neue Simulation („Neustart“).
2. Klicken Sie wiederholt auf die Schaltfläche „Eine neue Trajektorie (mit Spur)“ bzw. auf „10 neue Trajektorien (ohne Spur)“ und beobachten Sie die grünen Spurpunkte für auf der linken und das obere Histogramm auf der rechten Seite.
3. Erläutern Sie, wie der durch jeden Klick neu erzeugte grüne Spurpunkt im grünen Histogramm auf der rechten Seite dokumentiert wird.
4. Beschreiben Sie, wie sich die Gestalt des Histogramms verändert, wenn die Anzahl der Simulationen steigt.

Als Beispiel betrachten wir hier die relative Häufigkeit von Kopf, die nach simulierten Münzwürfen beobachtet wird. Diese wird in einem Histogramm dargestellt (das zunächst nur aus einer einzigen Säule besteht), und die Simulation wird wiederholt. Die zweite beobachtete relative Häufigkeit wird ebenfalls in das Histogramm aufgenommen (das nun aus zwei gleich hohen oder einer noch höheren Säule besteht). Nach Wiederholungen der Simulation mit jeweils Münzwürfen erhalten wir so ein Histogramm, das die Verteilung der auftretenden relativen Häufigkeiten darstellt. Die Abbildung zeigt ein Histogramm nach Simulationen von jeweils Münzwürfen.

Das so entstandene Histogramm kann Aufschluss darüber geben, wie, unter Einfluss der Wiederholungszahl der Simulation (mit jeweils Münzwürfen), die beobachteten relativen Häufigkeiten streuen. Schnell wird deutlich, dass, wenn das Diagramm auf nur wenigen Trajektorien beruht, die Säulen relativ unsystematisch verteilt sind, und dass sich erst bei größerem ein klares Bild ergibt: Bei streuen die relativen Häufigkeiten für *Kopf* wesentlich breiter als bei . Man kann dies nun auch für verschiedene Paare von und ausprobieren. Wählt man und , so kann man die Verteilungen sehen, die Sie aus dem Modul „10/20-Test-Problem“ kennen.

Diese qualitativen Einsicht (Abnahme der Streuung bei größer werdendem ) wollen wir im weiteren Verlauf unserer Untersuchungen quantifizieren.

## Dritter Schritt: Bestimmen von 95 %-Prognose-Intervallen

Fragestellung:

* Wie kann man die unterschiedliche Streuung messen?
* Kann man Aussagen darüber machen, wie diese so gemessene Streuung vom Stichprobenumfang abhängt?

Den SuS könnte aus der Sekundarstufe I die Standardabweichung oder der Quartilabstand vom Boxplot bekannt sein, der die Breite der mittleren 50 % angibt. Wenn man zuverlässige Vorhersagen der relativen Häufigkeit von Kopf machen will, verwendet man in der Statistik den „Bereich der mittleren 95 %“ (manchmal auch 99 %). Das sind übliche und sinnvolle Konventionen. Die Breite der mittleren 95 % kann dann auch als ein Streuungsmaß interpretiert werden.

Hinweis: Über die Sigma-Regeln kann man einen einfachen mathematischen Zusammenhang zwischen den beiden Streuungsmaßen herstellen: Den 95 %-Bereich kann man mit Hilfe der Standardabweichung berechnen (siehe Er-gänzungsmaterial). Hier soll er aus den simulierten Daten bestimmt werden.

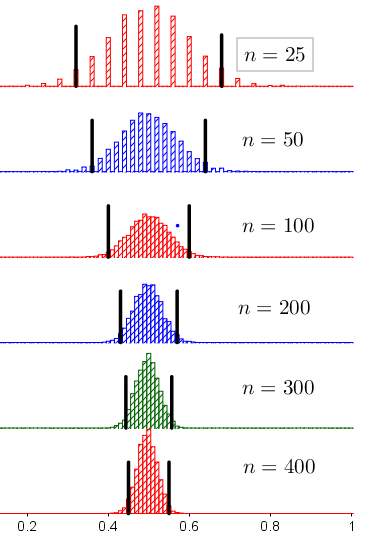
Die Streuung kann also durch die Betrachtung von Intervallen, die jeweils 95 % der beobachteten Werte enthalten, genauer beschrieben werden. Dafür werden das 2,5 %- und 97,5 %-Quantil markiert, also die kleinsten 2,5 % und die größten 2,5 % der beobachteten Werte für die relative Häufigkeit von *Kopf* abgetrennt. Da man nicht immer exakt 2,5 % der Werte abtrennen kann, verwendet man in der Stochastik zum Teil unterschiedliche Algorithmen zur Bestimmung dieser Quantile. Größere Abweichungen gibt es vor allem bei kleineren Wiederholungen .

1. Aktivieren Sie „95 %-Intervall (Simulation)“ und beobachten Sie, wie sich die Grenzen des Intervalls und seine Breite für und für unterscheiden.

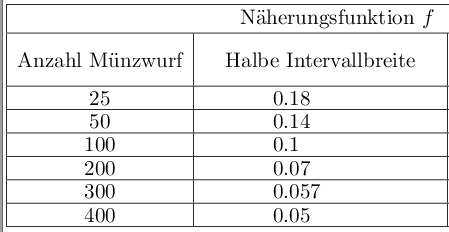
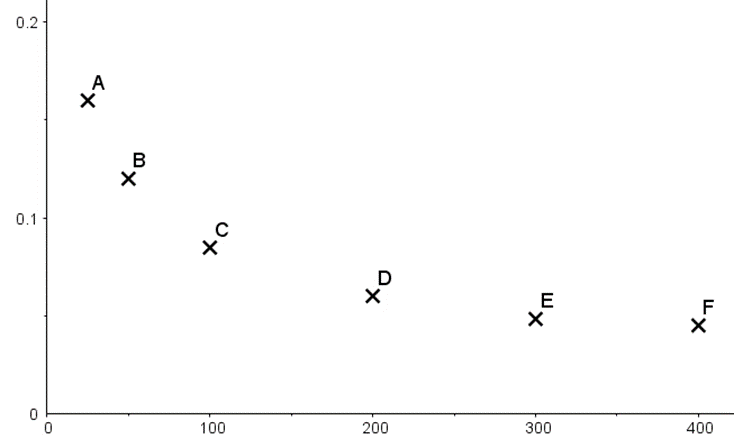
Sie können beobachten, dass das Prognoseintervall für etwa halb so groß ist wie für .

1. Exkurs: Aktivieren Sie nun „95 %-Intervall (Binomialverteilung)“ und beobachten Sie, wie sich mit wachsendem das Prognoseintervall aus der Simulation dem theoretischen Intervall, das über die Binomialverteilung bestimmt wurde, annähert.

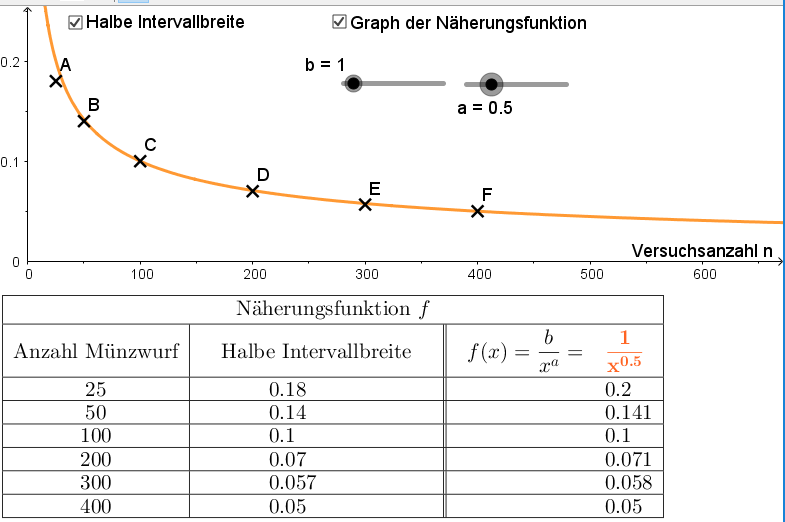
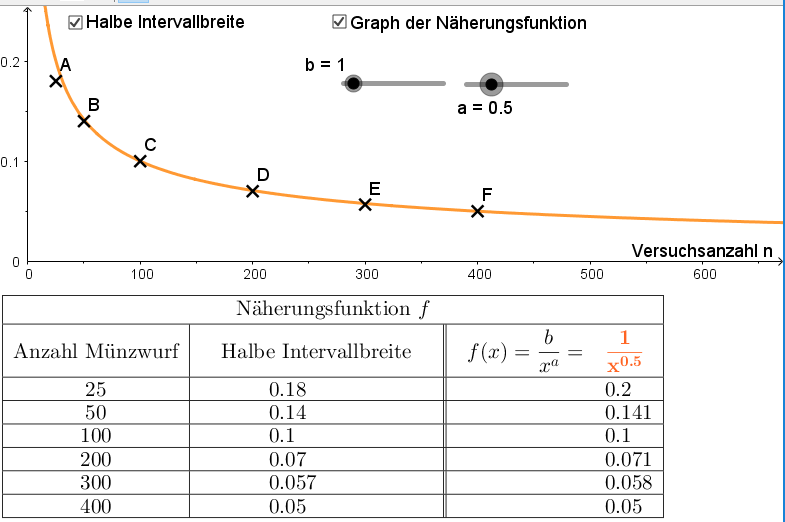
## Vierter Schritt: Finden einer Näherungsfunktion

Als nächstes wollen wir eine Funktion finden, die den Zusammenhang zwischen der Wiederholungzahl 𝑛 und der (halben) Breite des 95 %-Prognoseintervalls beschreibt. Dazu nutzen wir eine vorbereitete GeoGebra-Datei, in der der Münzwurf mit verschiedenen Wiederholungszahlen mit jeweils Fällen simuliert wurde, siehe Abbildung (aus der GeoGebra-Datei „…Teil4…“).

Dann sammeln wir die halben Breiten der 95 %-Prognoseintervalle für verschiedene (und jeweils ) und stellen die Punkte für und in einem Koordinatensystem dar, siehe Abbildungen. Hinweis: SuS könnten entdecken, dass eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs immer zur Halbierung der Intervallbreite führt.



Eine Kurve durch diese Punkte kann durch Funktionen des Typs mit angenähert werden. Aufgrund der Vorüberlegung (Vervierfachung von liefert Halbierung des Intervalls) können wir setzen.

1. Nutzen Sie die Schieberegler, um und so festzulegen, dass die Kurve die Punkte gut annähert.

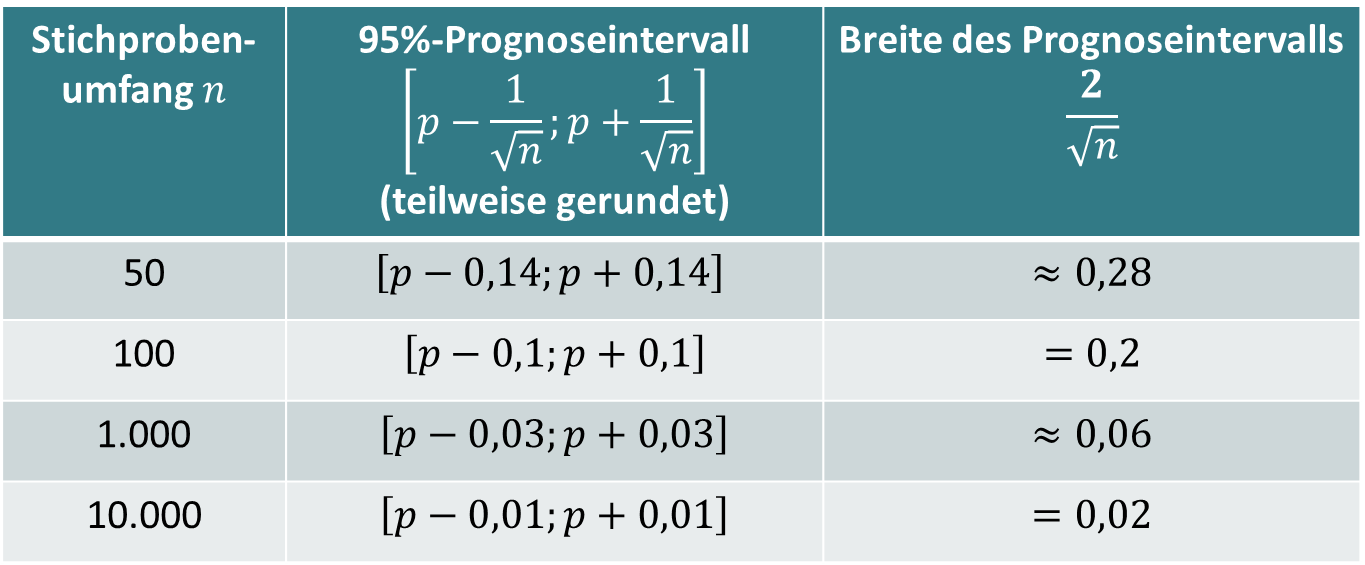
Für und , also ergibt sich eine gute Näherung, siehe Abbildung (aus der GeoGebra-Datei „…Teil4…“).

Die Tabelle in der GeoGebra-Datei ermöglicht zusätzlich den numerischen Vergleich zwischen den halben Intervallbreiten und den Funktionswerten der potentiellen Näherungsfunktionen.

## Fünfter Schritt: Vorhersage von relativen Häufigkeiten bei Simulationen und *bekannter Wahrscheinlichkeit p* ( - Gesetz)

Die relative Häufigkeit nach Simulationen, , liegt mit 95 % Wahrscheinlichkeit vom bekannten maximal entfernt. Wir können folgende Aussage treffen: liegt im Intervall . Dieser Schluss kann mit   
95% Sicherheit gezogen werden.

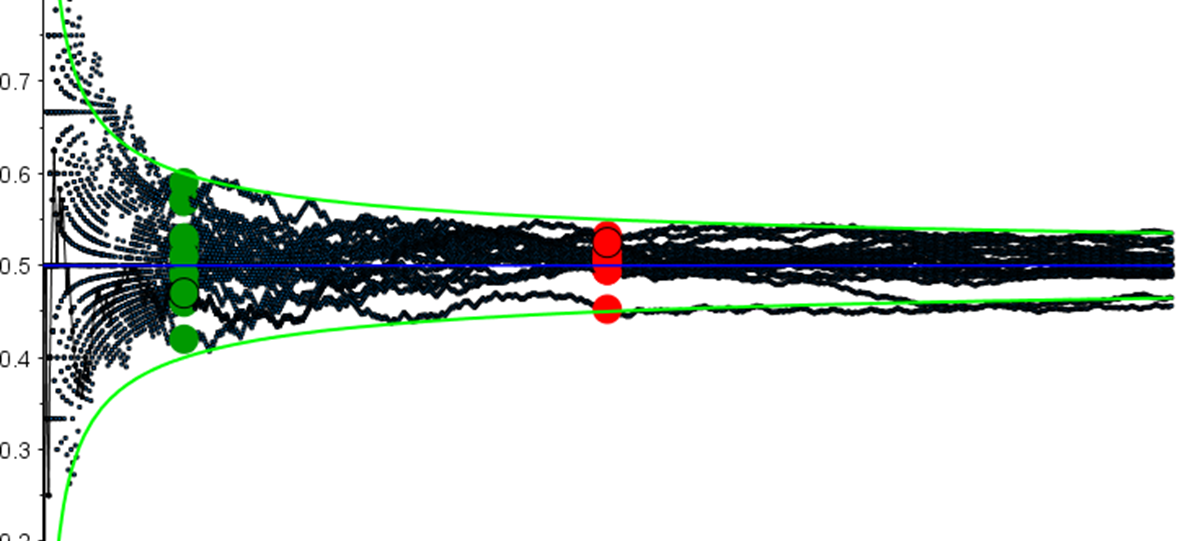
Dies führt zu nebenstehenden Faustregeln, die im Zentrum einer Unterrichtsplanung stehen können, in der das -Gesetz weniger ausführlich behandelt wird.



## Ergänzung: Illustration durch Graphik mit Trichter

Um zu verdeutlichen, wie die Näherungsfunktion zu den Trajektorien vom Beginn der Betrachtungen liegt, kehren wir zurück zur GeoGebra-Datei „…Teil3…“.

1. Aktivieren Sie das Kästchen „Trichter“ in der GeoGebra-Datei (…Teil3…) und beobachten Sie, ob und wie viele der Trajektorien-Punkte für jedes in dem Trichter liegen (hier beispielhaft für ).



Führt man mehrere Versuche durch, erkennt man jedes Mal wieder die Stabilisierung um den Wert , vgl. Graphik. Man sieht, dass die Punkte der Graphen „im Wesentlichen“ in dem Trichter liegen. „Im Wesentlichen“ bedeutet, dass man erwarten kann, dass für jedes immer 95 % der Punkte im Trichter liegen. Der *Radius* des Trichters kann mit dem Term abgeschätzt werden.

Die relativen Häufigkeiten liegen also für jedes mit 95 % Sicherheit in dem Intervall .

## Vertiefungsmöglichkeit

Die GeoGebra-Datei „…Teil3…“ bietet auch die Möglichkeit, andere Stichprobengrößen als 100 und 400 zu betrachten. Dafür wurden Schieberegler eingerichtet. Für kann man die folgende Beobachtung verifizieren: „Wenn   
ver-4-facht wird, wird die Intervallbreite halbiert.“

Für Informationen über die Hintergründe des -Gesetzes empfehlen wir das Zusatzmaterial.